Studio di funzione

Ricerca del dominio e degli asintoti di una funzione

Autore: Prof.ssa AGUELI Maria Assunta

Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Data la funzione
$$y = \frac{2x^2 - 3x^3}{x^2 - 1}$$
Effettuarne lo studio completo:

1) **Classificarla**
2) **Individuarne il Dominio (o Insieme di Definizione)**
3) **Calcolarne i limiti agli estremi dell'insieme di definizione**
4) **Individuare le equazioni degli eventuali asintoti**
5) **Individuare la posizione della curva rispetto agli assi cartesiani**
6) **Calcolarne la derivata prima**
7) **Individuare gli intervalli di crescenza e/o decrescenza**
8) **Calcolare le coordinate degli eventuali punti di :**
   massimo e/o minimo relativo , flesso a tangente orizzontale
9) **Effettuarne il grafico**

Punto 1 Classificarla

La funzione da esaminare è ALGEBRICA,FRATTA,RAZIONALE,DI TERZO GRADO,ESPLICITA

Punto 2 Individuarne il Dominio (o Insieme di Definizione)

Ricordiamo che:

⇨ Dicesi CE l'insieme dei valori attribuibili ad x affinché la y assuma valori reali (R) e finiti.

Ricerca dell'insieme di definizione: SE LA X COMPARE:

$$\mathbf{CE}\begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} \to g(x) \neq 0) \\ \sqrt[2n]{f(x)} \to f(x) \geq 0) \\ \log[f(x)] \to f(x) > 0) \end{cases}$$

al DENOMINATORE, questo , si pone $\boxed{\neq 0}$

Come radicando di una RADICE DI INDICE PARI, si pone il $\boxed{\text{Radicando} \geq 0}$

Ad argomento di un LOGARITMO, si pone l' $\boxed{\text{Argomento} > 0}$

Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Per cui, data la funzione $y = \frac{2x^2-3x^3}{x^2-1}$, si avrà

CE : $\boldsymbol{x^2 - 1 \neq 0 \quad \rightarrow x \neq \pm 1}$

CE : $\forall\ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}$ / $\boldsymbol{x \neq \pm 1}$ ➔*OPPURE* $\boldsymbol{x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)}$

Punto 3 Calcolarne i limiti agli estremi dell'insieme di definizione

Iniziamo a calcolare i limiti legati all'eventuale ricerca degli Asintoti Verticali

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \lim_{x\to-1} f(x) = l_1 \ ; \qquad \lim_{x\to+1} f(x) = l_2$$

⇨ **Qualora questi valori risultassero infinito, allora x=1 ed x=-1 saranno Asintoti verticali** (ASINTOTO : Retta tangente alla curva all'infinito)

Asintoto Verticale → si ricerca tra i valori che annullano il denominatore - rette del tipo

$$x = c \quad tale\ che \qquad \lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to1} \frac{2x^2 - 3x^3}{x^2 - 1} = \frac{2-3}{1-1} = \frac{-1}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to-1} \frac{2x^2 - 3x^3}{x^2 - 1} = \frac{2+3}{1-1} = \frac{5}{0} = \infty$$

$$⇨ \lim_{x\to\pm1} f(x) = \pm\infty \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \pm 1 \ :\ AV}$$

Passiamo ora ad esaminare il limite legato alla presenza dell'eventuale asintoto orizzontale, o, in assenza di questo (qualora il grado del numeratore superi di 1 il grado del denominatore) dell'eventuale asintoto obliquo.

$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x) = l}$ Se l esiste finito, allora $\boldsymbol{y = l}$ **A.O.**

Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Per il $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ vale la seguente REGOLA

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\begin{cases}\infty & \text{se il grado di } f(x) \text{ è maggiore } \boxed{>} \text{ del grado di } g(x)\\ 0 & \text{se il grado di } f(x) \text{ è minore } \boxed{<} \text{ del grado di } g(x)\\ \frac{a}{b} & \text{se i gradi sono uguali } \boxed{=}\end{cases}$$

Nel nostro esercizi o si avrà

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x^3}{x^2-1}\ \infty$ **AO** $\nexists$ perché *il limite* è ∞

Poiché non esiste l'A.O. ed il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore, possiamo procedere nella ricerca dell'eventuale Asintoto Obliquo . $y = mx + q$, con

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ con } m \text{ finito e } \neq 0$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx] \text{ con } q \text{ finito}$$

***[a** è il coef della x di grado max di $f(x)$*

b** è il coef della x di grado max di $g(x)$**Asintoto Obliquo → Ricordando che *può esistere solo se*, **CONDIZIONI:**

Nel nostro caso quindi può esistere l'As. Obl.

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+2x^2}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+2x^2}{x^3-x} = -3$$

$$q = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-3x^3}{x^2-1} + 3x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2\cancel{-3x^3}\cancel{+3x^3}-3x}{x^2-1}\right] = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow\ y = -3x + 2\ :\ A\,Obl$$

Prof.ssa Agueli Maria Assunta